DEDUZIONE INVARIANTIVA DELLE EQUAZIONI GRAVITAZIONALI DAL PRINCIPIO DI HAMILTON.

Nota di **Attilio Palatini** (Padova).

Adunanza del 10 agosto 1919.

Prefazione.

È ormai ben noto che, nella teoria della relatività generale, lo spazio fisico è caratterizzato da una forma differenziale quaternaria (che congloba spazio e tempo)

$$ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{1}$$

nei differenziali delle quattro variabili $x_0 = t$, x_1, x_2, x_3, i cui coefficienti g_{ik} sono i potenziali gravitazionali di Einstein. Il discriminante della (1) — essenzialmente negativo — sarà denotato con $-g$.

La mutua interdipendenza fra tutti i fenomeni fisici e la natura geometrica dello spazio è completamente determinata dalle dieci equazioni gravitazionali

$$G_{ik} - (\tfrac{1}{2} G + \lambda) g_{ik} = -\varkappa T_{ik}, \tag{2}$$

nelle quali: $G_{ik} = \sum_{0}^{3}{}_{h} \{ih,\ hk\}$ è il tensore di curvatura di Riemann; $G = \sum_{0}^{3}{}_{ik} G_{ik} g^{(ik)}$ la curvatura media dello spazio quadridimenzionale (1); T_{ik} il tensore energetico, che è determinato da tutti gli elementi — sforzi, quantità di moto, densità e flusso di energia — che caratterizzano i fenomeni fisici; $\varkappa$ e λ sono due costanti universali.

Dopo che, per merito di Einstein, furono scoperte le equazioni gravitazionali, si è cercato di farle scaturire da un principio variazionale, come, nell'ordinaria meccanica, vien fatto di ricavare le equazioni di Lagrange dal principio di Hamilton.

Il fine fu raggiunto dallo stesso Einstein, stabilendo un nuovo principio di Hamilton, che venne in seguito ben precisato da Hilbert e Weyl [1]).

[1]) D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (Erste Mitteilung), [Göttingen Nachrichten, Sitzung 20 november 1915].

H. Weyl, *Zur Gravitationstheorie* [Annalen der Physik, Bd. LIV (1917), pp. 117-145], oppure *Raum, Zeit und Materie* (Berlin, Springer, IIª edizione 1919).

I procedimenti seguiti da questi autori non sono però conformi allo spirito del Calcolo differenziale assoluto, poichè dai detti procedimenti scaturiscono delle equazioni invariantive (di fronte a cambiamenti di variabili), passando attraverso altre formule che carattere invariantivo non hanno.

Io mi propongo di raggiungere il medesimo scopo conservando l'invarianza nelle successive formule che vien fatto di introdurre. Mi gioveranno a tal uopo i risultati ottenuti nella mia Nota: *Sui fondamenti del Calcolo differenziale assoluto* [vedasi la mia Nota precedente in questo stesso volume dei Rendiconti], che nella presente richiamerò con la lettera *N*.).

§ 1.

Postulato fondamentale.

Cominciamo con l'introdurre con HILBERT il postulato fondamentale seguente: *Le leggi della fisica dipendono da un'unica funzione universale H, avente carattere invariantivo di fronte a qualsiasi trasformazione di coordinate, la quale dipende dai potenziali gravitazionali* $g^{(ik)}$, *dai corrispondenti simboli di* CHRISTOFFEL *e di* RIEMANN *e dagli elementi che caratterizzano i fenomeni fisici.*

A noi non è però dato di conoscere la forma che spetta alla funzione universale H e non ci rimane quindi che formulare delle ipotesi.

Ponendoci dal punto di vista della sintesi di tutti i fenomeni fisici, conviene supporre che sia

$$H = G + L + 2\lambda,$$

dove λ è una costante universale, G (curvatura media dello spazio quadridimenzionale) un termine che congloba e caratterizza l'influenza dello spazio-tempo sull'andamento dei fenomeni ed L un termine che include tutte le manifestazioni di origine fisica non inerenti all'intrinseca struttura dello spazio e del tempo.

§ 2.

Struttura della funzione *L*. Schema meccanico ridotto.

Dal punto di vista speculativo appare desiderabile di attribuire a tutte queste manifestazioni origine elettromagnetica, diretta o indiretta (come sarebbe il caso dei fenomeni luminosi e termodinamici). La espressione di L dovrebbe farsi dipendere in modo complicato dai parametri che fissano lo stato elettromagnetico del sistema e non si potrebbero isolare le equazioni gravitazionali da quelle che reggono l'andamento di tutti gli altri fenomeni.

Per la possibilità di adattare lo studio a casi concreti conviene limitarsi a consi derare il campo gravitazionale in sè e raccogliere in assegnate funzioni del posto e del tempo, e precisamente in un tensore energetico T_{ik}, tutto ciò che proviene dal complesso dei fenomeni fisici (gravitazione esclusa).

Ciò trova riscontro in quello che si fa talora nella meccanica ordinaria, quando volendosi p. es. discutere il moto, in un campo conservativo, di un punto materiale sopra una superficie scabra, si sostituisce all'analisi energetica del fenomeno — che porterebbe a considerare il lato termico della questione tenendo conto del calore dovuto allo sfregamento — l'introduzione della reazione d'attrito, come forza posizionale non conservativa.

Infatti, come nell'ordinario schema meccanico per riassumere un complesso di circostanze (che dànno luogo a dissipazione di energia cinetica) e che sarebbe impossibile o almeno assai penoso analizzare con frutto, si è condotti a risguardare come dati della questione forze non derivanti da un potenziale, così nel più comprensivo schema einsteiniano giova talora sostituire le T_{ik} all'unica L, la cui espressione effettiva sarebbe legata ad un complesso di fenomeni dei quali non si può o non si vuole fare l'analisi intrinseca.

Mercè queste T_{ik} si ricostruisce una L, atta a fornire le equazioni gravitazionali, ponendo [a])

$$L = \varkappa \sum_{0}^{3}{}_{ik} T_{ik} g^{(ik)}, \tag{3}$$

(denotando con $\varkappa$ una costante universale di omogeneità e) considerando come elementi dati e indipendenti dalle $g^{(ik)}$ non proprio le T_{ik}, ma i prodotti

$$\sqrt{g}\, T_{ik} = \mathfrak{T}_{ik},$$

che costituiscono il così detto tensore di volume coordinato al tensore T_{ik}, nella metrica quadridimensionale, definita dalla (1).

---

[a]) Si può continuare anche a tal proposito l'invocata analogia con la meccanica classica, notando che dal principio variazionale di HAMILTON $\delta \int (T + U)\, dt = 0$ [T forza viva, U potenziale] valido per il caso di forze conservative, si passa al principio generalizzato valido per forze qualisivogliano di componenti X_i ($i = 1, 2, 3$) sostituendo al potenziale U l'espressione lineare $\sum_{1}^{3}{}_i X_i x_i$ e trattandovi le X_i di fronte all'algoritmo variazionale, come dati della questione [$\delta X_i = 0$]. La espressione (3) di L fa in certo modo riscontro alla $\sum_{1}^{3}{}_i X_i x_i$.

§ 3.

Principio di Hamilton.

Tutto ciò premesso e ritenuto che la funzione universale abbia la forma

$$H = G + L + 2\lambda$$

con

$$L = \varkappa \sum_{0}^{3}{}_{ik} T_{ik} g^{(ik)},$$

vogliamo far vedere che le equazioni gravitazionali si possono compendiare nel sul principio variazionale

$$\delta \int_S H dS = 0, \tag{4}$$

denotando con S una porzione qualunque dello spazio quadridimenzionale e con δ un simbolo di variazione rispetto ai potenziali $g^{(ik)}$, con la condizione che ai limiti del campo si annullino le $\delta g^{(ik)}$ (e loro derivate prime e seconde).

Per la dimostrazione della nostra proposizione è anzitutto necessario stabilire alcune formule preparatorie.

§ 4.

Formule preparatorie.

Variazione dei simboli di Christoffel. — Partiamo dalle identità [3])

$$\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j} - \sum_p \left(\left\{ {hj \atop p} \right\} g_{pk} + \left\{ {kj \atop p} \right\} g_{hp} \right) = 0, \tag{5}$$

facili a verificarsi mediante le espressioni che competono ai simboli di Christoffel di II^a^ specie e che traducono in sostanza il noto lemma di Ricci, il quale afferma che è nullo il primo sistema derivato secondo la forma fondamentale dal sistema dei suoi coefficienti.

Avendo il simbolo δ il significato più sopra dichiarato, poniamo

$$\delta g_{hk} = e_{hk}$$

ed applichiamo poi il simbolo δ alla (5). Si ottiene

$$\frac{\partial e_{hk}}{\partial x_j} - \sum_p \left(\left\{ {hj \atop p} \right\} e_{pk} + \left\{ {kj \atop p} \right\} e_{hp} \right) - \sum_p \left(g_{pk} \delta \left\{ {hj \atop p} \right\} + g_{hp} \delta \left\{ {kj \atop p} \right\} \right) = 0.$$

---

3) In questo § 4 lasciamo i simboli di sommatoria privi di limiti, le considerazioni in esso contenute valendo per un ds^2 qualunque e non per lo speciale ds^2 quadridimensionale di Einstein.

I primi due termini costituiscono il primo sistema derivato covariantemente dal sistema e_{hk} [cfr. la formula (14) di *N.*) per il caso particolare $m = 2$], quindi

$$e_{hk/j} = \sum_p \left(g_{pk}\, \delta \begin{Bmatrix} hj \\ p \end{Bmatrix} + g_{hp}\, \delta \begin{Bmatrix} kj \\ p \end{Bmatrix} \right).$$

Scambiando ora in questa formula k con j, poi h con j, sommando le due equazioni così ottenute e togliendo quella qui scritta, si ottiene

$$\eta_{hkj} = \sum_p g_{pj}\, \delta \begin{Bmatrix} hk \\ p \end{Bmatrix}, \tag{6}$$

avendo posto

$$\eta_{hkj} = \tfrac{1}{2}(e_{hj/k} + e_{kj/h} - e_{hk/j}).$$

Moltiplichiamo ora la (6) per $g^{(ij)}$ e sommiamo rispetto all'indice j. Purchè si ponga

$$\eta_{hk}^{(i)} = \sum_j g^{(ij)} \eta_{hkj}, \tag{7}$$

si ottiene immediatamente

$$\delta \begin{Bmatrix} hk \\ i \end{Bmatrix} = \eta_{hk}^{(i)}. \tag{8}$$

Variazione dei simboli di RIEMANN *ed espressione esplicita di* δG. — Dalla (7) si rileva tosto che le $\eta_{hk}^{(i)}$ costituiscono un sistema misto covariante doppio e controvariante semplice.

Dalla formula fondamentale che dà la derivata covariante di un sistema misto [cfr. la formula (13) di *N.*), che è appunto relativa ai sistemi covarianti doppi e controvarianti semplici], otteniamo

$$\eta_{hk/j}^{(i)} = \frac{\partial \eta_{hk}^{(i)}}{\partial x_j} - \sum_l \left(\begin{Bmatrix} hj \\ l \end{Bmatrix} \eta_{lk}^{(i)} + \begin{Bmatrix} kj \\ l \end{Bmatrix} \eta_{hl}^{(i)} - \begin{Bmatrix} lj \\ i \end{Bmatrix} \eta_{hk}^{(l)} \right). \tag{9}$$

Prendiamo ora a considerare i simboli di RIEMANN di seconda specie

$$\{hi,\, kj\} = \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{Bmatrix} hk \\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{Bmatrix} hj \\ i \end{Bmatrix} + \sum_l \left(\begin{Bmatrix} hk \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} lj \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} hj \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} lk \\ i \end{Bmatrix} \right)$$

ed applichiamo a loro il simbolo δ. Tenendo presenti le (8), si ricava subito

$$\delta\{hi,\, kj\} = \frac{\partial \eta_{hk}^{(i)}}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_{hj}^{(i)}}{\partial x_k} + \sum_l \left(\eta_{hk}^{(l)} \begin{Bmatrix} lj \\ i \end{Bmatrix} + \eta_{lj}^{(i)} \begin{Bmatrix} hk \\ l \end{Bmatrix} - \eta_{hj}^{(l)} \begin{Bmatrix} lk \\ i \end{Bmatrix} - \eta_{lk}^{(i)} \begin{Bmatrix} hj \\ l \end{Bmatrix} \right),$$

da cui, a norma delle (9) $\left[\text{aggiungendo e togliendo nei secondi membri } \sum_l \eta_{lh}^{(i)} \begin{Bmatrix} kj \\ l \end{Bmatrix}\right]$,

$$\delta\{hi,\, kj\} = \eta_{hk/j}^{(i)} - \eta_{hj/k}^{(i)}.$$

Ne segue che, essendo

$$G_{hj} = \sum_k \{hk,\, kj\}$$

gli elementi del tensore di RIEMANN, si ha

$$\delta G_{bj} = \sum_k (\eta^{(k)}_{bk/j} - \eta^{(k)}_{bj/k}).$$

Per la variazione della curvatura media

$$G = \sum_{ik} G_{ik} g^{(ik)}$$

si ha quindi

(10) $$\delta G = \sum_{ik} G_{ik} \delta g^{(ik)} + \sum_{ibk} g^{(ik)} (\eta^{(b)}_{ib/k} - \eta^{(b)}_{ik/b}).$$

Posto ora

$$i^{(k)} = \sum_{ib} (g^{(ik)} \eta^{(b)}_{ib} - g^{(ib)} \eta^{(k)}_{ib}),$$

si constata immediatamente che

$$\sum_{ibk} g^{(ik)} (\eta^{(b)}_{ib/k} - \eta^{(b)}_{ik/b}) = \sum_k i^{k}_{/k},$$

quindi in virtù della formula (17) di *N.*), la (10) può presentarsi sotto la forma

(11) $$\delta G = \sum_{ik} G_{ik} \delta g^{(ik)} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{g}\, i^{(k)})}{\partial x_k}.$$

§ 5.

Deduzione delle equazioni gravitazionali.

Premesso tutto ciò, riprendiamo l'equazione variazionale (4). Se poniamo

$$d\omega = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

si ha notoriamente

$$dS = \sqrt{g}\, d\omega;$$

quindi la (4) può esser presentata sotto la forma

$$\delta \int_S \left\{ (G + 2\lambda)\sqrt{g} + \varkappa \sum_{0\,ik}^{3} \mathfrak{T}_{ik} g^{(ik)} \right\} d\omega = 0,$$

od anche, tenendo presente che le $\mathfrak{T}_{ik}$ vanno risguardate come indipendenti dalle $g^{(ik)}$,

(12) $$\int_S \left\{ \delta G . \sqrt{g} + (G + 2\lambda)\delta\sqrt{g} + \varkappa \sum_{0\,ik}^{3} \mathfrak{T}_{i}\, \delta g^{(ik)} \right\} d\omega = 0.$$

Ora

$$\delta\sqrt{g} = \sum_{ik} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g^{(ik)}} \delta g^{(ik)};$$

ma, come è noto,

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g^{(ik)}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g}\, g_{ik},$$

quindi

$$\delta\sqrt{g} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g}\,\sum_{ik} g_{ik}\,\delta g^{(ik)}.$$

Introduciamo ora nella (12) questa espressione di $\delta\sqrt{g}$ e al posto di δG poniamo il suo valore dato dalla (11). Uno dei termini che vien fatto di scrivere è il seguente

$$\int_S \sum_{0}^{3}{}_k \frac{\partial(\sqrt{g}\,i^{(k)})}{\partial x_k}\,d\omega = \sum_{0}^{3}{}_k \int_S \frac{\partial(\sqrt{g}\,i^{(k)})}{\partial x_k}\,d\omega.$$

Questo integrale si trasforma ovviamente, mediante il lemma di GREEN, in un altro esteso al contorno di S. Da ciò apparisce che esso è nullo, in virtù dell'espressione di $i^{(k)}$ e dell'ipotesi che ai limiti di S si annullino le variazioni dei potenziali e loro derivate.

Rimane quindi

$$\int_S \sum_{0}^{3}{}_{ik} \left\{ G_{ik} - \left(\tfrac{1}{2}G + \lambda\right) g_{ik} + \varkappa\, T_{ik} \right\} \delta g^{(ik)}\, dS = 0$$

e da qui, data l'arbitrarietà del campo S e delle $\delta g^{(ik)}$, con procedimento noto, seguono le equazioni

$$G_{ik} - \left(\tfrac{1}{2}G + \lambda\right) g_{ik} = -\varkappa\, T_{ik},$$

che coincidono con le (2).

Le equazioni gravitazionali risultano così dedotte dal principio variazionale (4), mantenendo a tutto lo svolgimento del calcolo carattere invariantivo.

§ 6.

Condizioni differenziali provenienti dai principii di conservazione.

Ricordiamo che gli elementi del tensore energetico T_{ik} si prestano ad una semplice interpretazione fisica: sforzi, densità e flusso di energia [4]) e non dimentichiamo poi che nel detto tensore è racchiuso *tutto* ciò che proviene dal complesso dei fenomeni fisici (gravitazione esclusa). Ne segue che devono valore i così detti teoremi di conservazione, ossia che per ogni sistema materiale che vien fatto di considerare e per ogni sua porzione elementare devonsi annullare le componenti della forza esterna applicata al sistema e la densità di potenza, cioè l'energia comunicata dall'esterno al sistema per unità di tempo. Le T_{ik}, in altre parole, costituiscono un sistema doppio a divergenza

[4]) Cfr. T. LEVI-CIVITÀ, *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di* EINSTEIN [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. XXVI, 1° semestre 1917, pp. 381-391], p. 383 e 384.

nulla, il che si esprime, con le notazioni del calcolo differenziale assoluto, mediante le equazioni

$$\sum_0^3{}_k T_{ik}^{(k)} = 0.$$

Se noi allora indichiamo con A_{ik} i primi membri delle equazioni gravitazionali, devesi di necessità avere anche

$$(13) \qquad \sum_0^3{}_k A_{ik}^{(k)} = 0.$$

Ciò può far pensare che queste relazioni tra le g_{ik}, impongano una restrizione alle possibili forme di ds^2, caratterizzanti varietà einsteiniane.

Ma è facile invece provare che le equazioni (13) sono pure identità. Si perviene alla dimostrazione del nostro asserto con gli stessi procedimenti che ci permisero di dedurre le equazioni gravitazionali, seguendo un criterio già indicato dal WEYL [5])

Supponiamo a tal uopo che la variazione delle g_{ik} sia dovuta, anzichè ad una alterazione intrinseca del campo gravitazionale, ad un semplice cambiamento (infinitesimale) di variabili.

Ai parametri x_0, x_1, x_2, x_3 se ne sostituiscano dei nuovi legati agli antichi dalle relazioni

$$(14) \qquad x'_i = x_i + \xi^{(i)}, \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

dove denotiamo con $\xi^{(i)}$ quattro funzioni infinitesime arbitrarie di x_0, x_1, x_2, x_3, costituenti un sistema semplice controvariante.

Determiniamo le variazioni δg_{ik} che subiscano i coefficienti della forma fondamentale

$$ds^2 = \sum_0^3{}_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

per effetto della trasformazione (14).

Sottoponendo a variazione il ds^2, si trova

$$\delta ds^2 = \sum_0^3{}_{ikj} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \xi^{(j)} + 2 g_{ij} \frac{\partial \xi^{(j)}}{\partial x_k} \right\} dx_i\, dx_k,$$

ovvero, indicando con ξ_i gli elementi reciproci degli elementi $\xi^{(i)}$, cioè ponendo

$$\xi^{(j)} = \sum_0^3{}_i g^{(ij)} \xi_i,$$

$$\delta ds^2 = 2 \sum_0^3{}_{ik} \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \sum_0^3{}_j \left\{ {ik \atop j} \right\} \xi_j \right\} dx_i\, dx_k.$$

Nel termine tra parentesi si riconosce tosto la derivata covariante del sistema ξ_i,

---

5) L. c. (1), p. 121 e seg.

per cui si ha ancora

$$\delta\, d s^2 = 2 \sum_{0}^{3}{}_{ik} \xi_{i/k}\, d x_i\, d x_k,$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\delta\, d s^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik} (\xi_{i/k} + \xi_{k/i})\, d x_i\, d x_k.$$

Ne risulta che alle variazioni δg_{ik} competono le espressioni

$$\delta g_{ik} = \xi_{i/k} + \xi_{k/i}.$$

Per ottenere la variazione degli elementi reciproci $g^{(ik)}$, si parta dalle identità

$$\sum_{0}^{3}{}_{p}\, g^{(ip)} g_{qp} = \varepsilon_{iq}.$$

Applicando ad esse il simbolo δ, viene

$$\sum_{0}^{3}{}_{p}\, \delta g^{(ip)} g_{qp} + \sum_{0}^{3}{}_{p}\, g^{(ip)} \delta g_{qp} = 0,$$

da cui moltiplicando per $g^{(kq)}$ e sommando rispetto all'indice q,

$$\delta g^{(ik)} = - \sum_{0}^{3}{}_{pq}\, g^{(ip)} g^{(kq)} \delta g_{pq}$$

e quindi

$$\delta g^{(ik)} = - \sum_{0}^{3}{}_{pq}\, g^{(ip)} g^{(kq)} (\xi_{p/q} + \xi_{q/p}). \tag{15}$$

Si consideri ora l'espressione

$$I = \int_S (G + \lambda)\, d S,$$

(dove G e λ hanno lo stesso significato dei numeri precedenti). I è un invariante di fronte a qualsivoglia cambiamento di variabili e quindi in particolare di fronte ad una trasformazione del tipo (14). Ne segue che deve esser nulla la variazione δI, che subisce I per effetto appunto della trasformazione (14), cioè si deve avere

$$\delta I = \delta \int_S (G + \lambda)\, d S = 0.$$

Operando ora come abbiamo operato al § 5, viene

$$\int_S \sum_{0}^{3}{}_{ik} \left\{ G_{ik} - \left(\tfrac{1}{2} G + \lambda\right) g_{ik} \right\} \delta g^{(ik)}\, d S = \int_S \sum_{0}^{3}{}_{ik} A_{ik}\, \delta g^{(ik)}\, d S = 0.$$

Sostituendo a $\delta g^{(ik)}$ le espressioni (15) e tenendo presente che A_{ik} è un sistema simmetrico, si ottiene

$$\int_S \sum_{0}^{3}{}_{ikpq} A_{ik}\, g^{(ip)} g^{(kq)} \xi_{p/q}\, d S = 0.$$

E da qui, mediante una integrazione per parti, con l'aiuto della formula (23) stabilita in N.):

$$\int_S \sum_{0}^{3}{}_{ikpq} A_{ik/q} g^{(ip)} g^{(kq)} \xi_p \, dS = \int_S \sum_{0}^{3}{}_{ik} A_{ik}^{(k)} \xi^{(i)} \, dS = 0.$$

Ed ora, data l'arbitrarietà del campo S e delle funzioni $\xi^{(i)}$, da qui si ottiene

$$\sum_{0}^{3}{}_{k} A_{ik}^{(k)} = 0,$$

C. D. D.

Padova, Agosto 1919.

ATTILIO PALATINI.